# Gotische Maßwerke

Herleitungen und Beweise

Mario Spengler

17. Dezember 2007

**Zusammenfassung**

Die folgende Abhandlung beschränkt sich auf Spitzbogen über gleichseitigen Dreiecken. In ihrem Inneren lassen sich auf vielfältige Weise mehr oder weniger komplexe Maßwerke nur mit Zirkel und Lineal konstruieren: n-Pass, n-Schneuß, Nonnenkopf und die im folgenden auch bewiesenen Grundkonstruktionen.

Die Voraussetzungern werden stets verbal notiert, die eigentliche Herleitung erfolgt formal. Neben Termumformungen werden der Satz des Pythagoras, der 2. Strahlensatz und eine Methode zum Lösen quadratischer Gleichungen benötigt.

Bei regelmäßigen Fünfecken muss ein Winkel der Größe 72° konstruiert werden. Diese Konstruktion wird auf zwei verschiedene Arten begründet. Bei 6.2 wird ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Basiswinkel der Größe 72° vorausgesetzt und daraus eine Konstruktionsidee entwickelt. Bei 6.3 hingegen wird ein gleichschenkliges Dreieck vorausgesetzt, dessen Schenkel nach dem goldenen Schnitt unterteilt sind, woraus ein Basiswinkel von 72° gefolgert wird.

## Inhaltsverzeichnis

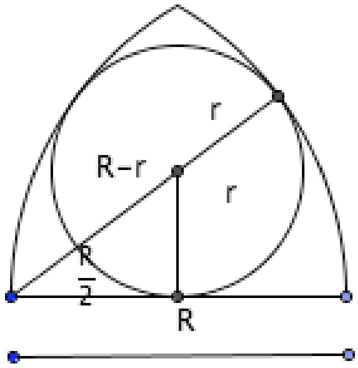
# 1 Spitzbogen mit einem Inkreis

*Voraussetzung:* Der Inkreis mit dem Radius $r$ berührt von innen beide Bogen mit dem Radius $R$ und die Grundseite der Länge $R$.

*Behauptung:* $r = \frac{3}{8}R$

*Beweis:* Pythagoras:

$$\begin{aligned}
r^2 + (\tfrac{R}{2})^2 &= (R-r)^2 \\
r^2 + \tfrac{R^2}{4} &= R^2 - 2Rr + r^2 \\
2Rr &= \tfrac{3}{4}R^2 \\
\Longrightarrow r &= \tfrac{3}{8}R
\end{aligned}$$




$\square$

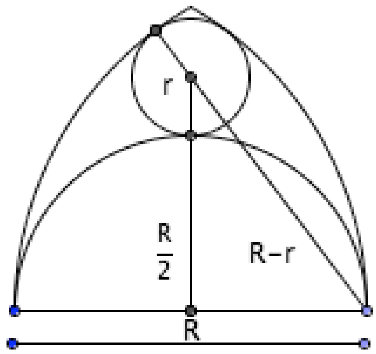
# 2 Spitzbogen mit kleinem Kreis über einem Halbkreis

*Voraussetzung:* Der kleine Kreis mit dem Radius $r$ berührt von innen beide Bogen mit dem Radius $R$ und den Halbkreis vom Radius $\frac{R}{2}$ von außen.

*Behauptung:* $r = \frac{1}{6}R$

*Beweis:* Pythagoras:

$$\begin{aligned}
(\tfrac{R}{2})^2 + (r + \tfrac{R}{2})^2 &= (R-r)^2 \\
\tfrac{R^2}{4} + r^2 + Rr + \tfrac{R^2}{4} &= R^2 - 2Rr + r^2 \\
3Rr &= \tfrac{1}{2}R^2 \\
\Longrightarrow r &= \tfrac{1}{6}R
\end{aligned}$$




$\square$

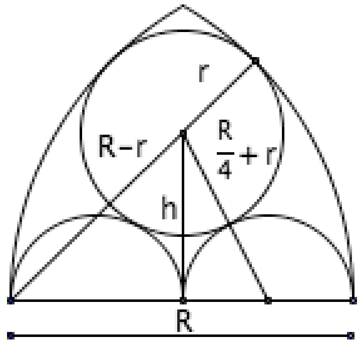
# 3 Spitzbogen mit Kreis über zwei Halbkreisen

*Voraussetzung:* Der Kreis mit dem Radius $r$ berührt von innen beide Bogen mit dem Radius $R$ und beide Halbkreise vom Radius $\frac{R}{4}$ von außen.

*Behauptung:* $r = \frac{3}{10}R$

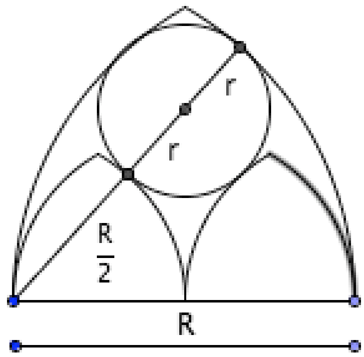
*Beweis:* Pythagoras: Gleichsetzen der Höhenquadrate

$$\begin{aligned}
(r + \tfrac{R}{4})^2 - (\tfrac{R}{4})^2 &= h^2 = (R-r)^2 - (\tfrac{R}{2})^2 \\
r^2 + \tfrac{Rr}{2} + \tfrac{R^2}{16} - \tfrac{R^2}{16} &= R^2 - 2Rr + r^2 - \tfrac{R^2}{4} \\
\tfrac{5}{2}Rr &= \tfrac{3}{4}R^2 \\
\Longrightarrow r &= \tfrac{3}{10}R
\end{aligned}$$




$\square$

## 4 Kreis über zwei kleinen Spitzbogen




*Voraussetzung:* Der kleine Kreis mit dem Radius $r$ berührt von innen beide große Bogen vom Radius $R$ und von außen die kleinen Bogen vom Radius $\frac{R}{2}$.

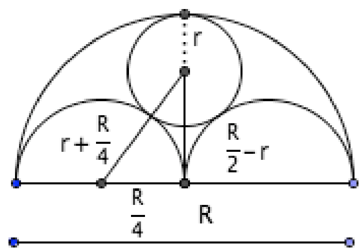
*Behauptung:* $r = \frac{1}{4}R$

*Beweis:* Linearer Ansatz:

$$\begin{aligned} 2 \cdot r + \tfrac{R}{2} &= R \\ \Longrightarrow r &= \tfrac{1}{4}R \end{aligned}$$

□

## 5 Gotischer Passbogen




*Voraussetzung:* Der kleine Kreis mit dem Radius $r$ berührt von innen den großen Halbkreis vom Radius $\frac{R}{2}$ und von außen die beiden kleinen Halbkreise vom Radius $\frac{R}{4}$.

*Behauptung:* $r = \frac{1}{6}R$

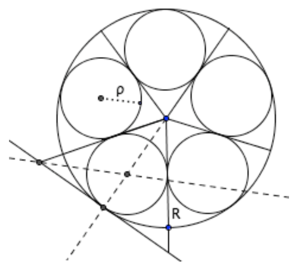
*Beweis:* Pythagoras:

$$\begin{aligned} (\tfrac{R}{4})^2 + (\tfrac{R}{2} - r)^2 &= (\tfrac{R}{4} + r)^2 \\ \tfrac{R^2}{16} + \tfrac{R^2}{4} - Rr + r^2 &= \tfrac{R^2}{16} + \tfrac{Rr}{2} + r^2 \\ -\tfrac{3}{2}Rr &= -\tfrac{R^2}{4} \\ \Longrightarrow r &= \tfrac{1}{6}R \end{aligned}$$

□

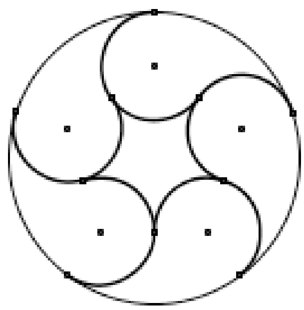
## 6 Konstruktion Regelmäßiger Fünfecke

### 6.1 Fünfpass und Fünfschneuß




Beim Fünfpass berühren sich die kleinen Kreise mit dem Radius $\rho$ gegenseitig und den großen Kreis mit dem Radius $R$ von innen. Sie sind Inkreise der Dreiecke, welche durch 2 verlängerte Radien $R$ und eine Tangente begrenzt werden. Die Tangente steht im Berührpunkt orthogonal auf der Winkelhalbierenden des Mittelpunktswinkels, dessen Größe 72° beträgt.

Der Inkreismittelpunkt ergibt sich aus dem Schnitt zweier Winkelhalbierenden im oben beschriebenen Tangentendreieck. Der Inkreisradius $\rho$ ist das Lot vom Mittelpunkt auf den Berührpunkt der Tangente.



Die übrigen 4 Kreise erhält man durch Achsenspiegelung oder durch Drehung um jeweils 72°.

Eine andere Betonung der Innenbogen bei gleicher Konstruktion ergibt einen Fünfschneuß.

Im nächsten Kapitel wird über zwei Dreiecke zunächst die Konstruktionsidee eines 72°-Winkels (ohne Winkelmesser) bewiesen und danach erst die eigentliche Konstruktion skizziert.

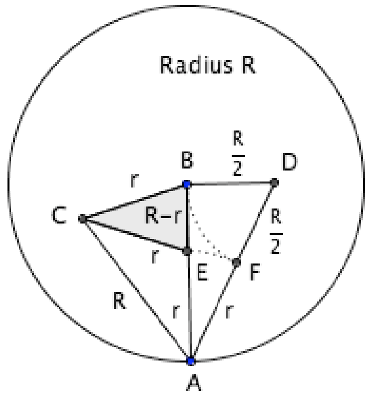
## 6.2 Konstruktion eines Winkels der Größe 72°

*Vorbemerkung:* Es soll zunächst bewiesen werden, dass in den beiden Dreiecken $\Delta ABC$ und $\Delta ADB$ die beiden Strecken AE und AF dieselbe Länge $r$ besitzen.

*Voraussetzung:* $\Delta ABC$ mit dem Mittelpunktswinkel $\measuredangle CBA = 72°$ als Basiswikel eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Schenkel die Länge $R$ und die Basis der Länge $r$ besitzen.
Das rechtwinklige Dreieck $\Delta ADB$ mit den Katheten $R$ und $\frac{R}{2}$.

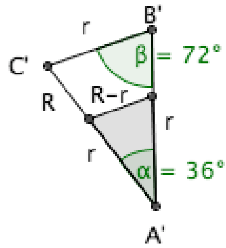
*Behauptung:* Der Schenkel $R$ (Seite AB) ist in beiden Teildreiecken in die Teilstrecken $r$ und $R - r$ unterteilt, wobei $r$ die Basislänge im $\Delta ABC$ ist.

*Beweis:* Im gleichschenkligen Dreieck ABC läßt sich innen ein kleines gleichschenkliges Dreieck $\Delta EBC$ mit den Schenkeln $r$ und der Basis EB konstruieren. Nach dem Winkelsummensatz folgt, dass $\measuredangle ACE = 36°$ ist; also ist auch $\Delta AEC$ gleichschenklig, die Strecke AE hat ebenfalls die Länge $r$ und BE hat die Länge $R - r$. Das kleine schraffierte Dreieck $\Delta EBC$ hat dieselben Innenwinkel wie $\Delta ABC$ und kann so positioniert werden, dass sich die beiden 36°-Winkel bei A' in der Teilskizze des $\Delta A'B'C'$ überdecken. Dann gilt nach dem 2. Strahlensatz:




$$\frac{r}{R-r} = \frac{R}{r}$$
$$r^2 = R^2 - R \cdot r \qquad \text{quadr. Ergänzung}$$
$$r^2 + R \cdot r + (\tfrac{R}{2})^2 = \tfrac{5}{4}R^2$$
$$\Longrightarrow r = \tfrac{R}{2}\sqrt{5} - \tfrac{R}{2}$$

Im $\Delta ADB$ gilt nach Pythagoras mit r' als Länge der Strecke AF:
$$R^2 + (\tfrac{R}{2})^2 = (r' + \tfrac{R}{2})^2 \;=\; \tfrac{5}{4} \cdot R^2$$
$$\Longrightarrow r' \;=\; r = \tfrac{R}{2}\sqrt{5} - \tfrac{R}{2}$$




□

*Konstruktion:* Bei gegebenem Radius $R$ wird zunächst im rechwinkligen Teildreieck $\Delta ADB$ mit den Katheten $R$ und $\frac{R}{2}$ die Strecke AF der Länge $r$ konstruiert und nach links auf den Radius $R$ als Strecke AE übertragen. Punkt C ergibt sich als Schnitt zweier Kreise mit Radius $r$ um die Punkte B und E.

## 6.3 Recherische Überprüfung der Winkelgröße mit Hilfe des goldenen Schnitts

*Definition:* Eine Strecke ist nach dem goldenen Schnitt geteilt, falls $\frac{\text{Ganze Strecke}}{\text{Große Teilstrecke}} = \frac{\text{Große Teilstrecke}}{\text{Kleine Teilstrecke}}$

*Voraussetzung:* In obiger Skizze ist die Strecke AB mit den Längen $R$, $r$ und $R - r$ nach dem goldenen Schnitt unterteilt.

*Behauptung:* Die Innenwinkel im Dreiecks ABC betragen 72°und 36°.

*Beweis:*
$$\frac{\text{Ganze Strecke}}{\text{Große Teilstrecke}} = \frac{\text{Große Teilstrecke}}{\text{Kleine Teilstrecke}} \qquad \Longrightarrow \frac{R}{r} = \frac{r}{R-r}$$
$$r^2 = R^2 - R \cdot r \qquad \text{quad. Ergänzung wie oben}$$
$$\Longrightarrow r = \tfrac{R}{2}\sqrt{5} - \tfrac{R}{2}$$

Dieses Ergebnis verwende man nun, um mit dem Cosinus-Satz einen Basiswinkel zu berechnen:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\beta$$
$$\utilde{R^2} = r^2 + \utilde{R^2} - 2Rr \cdot cos\beta$$
$$cos\beta = \frac{r^2}{2Rr} = \frac{\frac{R}{2}\sqrt{5} - \frac{R}{2}}{2R} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$
$$\Longrightarrow \quad \beta = 72°, \alpha = 36° \qquad \text{gleichschenkliges } \Delta ABC \text{ und Winkelsummensatz}$$

□