

# Vektorielle Beweise

Seite 173f, Analytische Geometrie, Volk und Wissen, Berlin

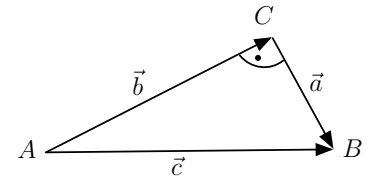
Mario Spengler

30. Januar 2005

# 1 Satz des Pythagoras

Voraussetzung:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ,  $\vec{a} \perp \vec{b}$

Behauptung:  $\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{c}$  oder  
 $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = \vec{c}^2$



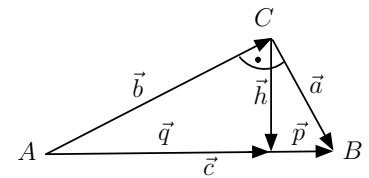
Beweis:  $\vec{c}^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \underbrace{2\vec{a} \cdot \vec{b}}_{0, \text{ da } \vec{a} \perp \vec{b}} + \vec{b}^2$   
 $= \vec{a}^2 + \vec{b}^2$

□

# 2 Kathetensatz des Euklid

Voraussetzung:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ,  $\vec{a} \perp \vec{b}$   
 $\vec{h} + \vec{p} = \vec{a}$ ,  $\vec{h} \perp \vec{c}$

Behauptung:  $\vec{a}^2 = \vec{p} \cdot \vec{c}$



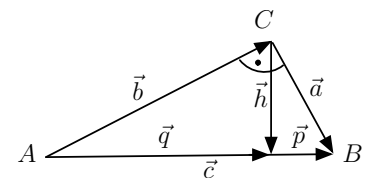
Beweis:  $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$   $|\cdot \vec{a}$   
 $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{c} - \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{0, \text{ da } \vec{a} \perp \vec{b}}$   
 $\vec{a}^2 = (\vec{h} + \vec{p}) \cdot \vec{c}$   
 $\vec{a}^2 = \underbrace{\vec{h} \cdot \vec{c}}_{0, \text{ da } \vec{h} \perp \vec{c}} + \vec{p} \cdot \vec{c}$   
 $\vec{a}^2 = \vec{p} \cdot \vec{c}$

□

# 3 Höhensatz des Euklid

Voraussetzung:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ,  $\vec{a} \perp \vec{b}$   
 $\vec{q} + \vec{p} = \vec{c}$ ,  $\vec{h} \perp \vec{p}, \vec{q}$   
 $\vec{p}^2 + \vec{h}^2 = \vec{a}^2$   
 $\vec{q}^2 + \vec{h}^2 = \vec{b}^2$

Behauptung:  $\vec{h}^2 = \vec{p} \cdot \vec{q}$



Beweis:  $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{c}^2 = (\vec{q} + \vec{p})^2$   
 $\underbrace{\vec{a}^2}_{\vec{p}^2 + \vec{h}^2} + \underbrace{2\vec{a} \cdot \vec{b}}_0 + \underbrace{\vec{b}^2}_{\vec{q}^2 + \vec{h}^2} = \vec{c}^2 = \vec{p}^2 + 2\vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{q}^2$   
 $\implies 2\vec{h}^2 = 2\vec{p} \cdot \vec{q}$   
 $\implies \vec{h}^2 = \vec{p} \cdot \vec{q}$

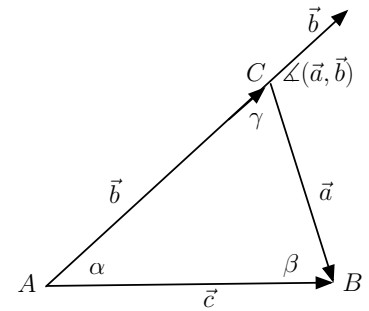
□

## 4 Cosinussatz

Voraussetzung:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$   
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$   
 $\gamma = 180 - \angle(\vec{a}, \vec{b})$   
 $\cos \gamma = -\cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$

Behauptung:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \gamma$

Beweis:  $c^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = a^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2$   
 $= a^2 + b^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$   
 $= a^2 + b^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \gamma$



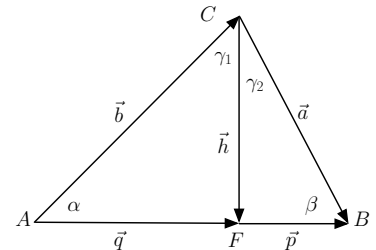
□

## 5 Sinussatz

Voraussetzung:  $\vec{q} - \vec{b} = \vec{a} - \vec{p} = \vec{h}$   
 $\vec{q} \cdot \vec{h} = \vec{p} \cdot \vec{h} = 0$

Behauptung:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$

Beweis:  $\vec{q} - \vec{b} = \vec{a} - \vec{p} \quad | \cdot \vec{h}$   
 $\underbrace{\vec{q} \cdot \vec{h}}_0 + \underbrace{(-\vec{b}) \cdot \vec{h}}_0 = \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{h}}_0 + \underbrace{(-\vec{p}) \cdot \vec{h}}_0$   
 $|\vec{b}||\vec{h}| \cos \gamma_1 = |\vec{a}||\vec{h}| \cos \gamma_2 \quad | : |\vec{h}|$   
 $|\vec{b}| \cos \gamma_1 = |\vec{a}| \cos \gamma_2$   
 $|\vec{b}| \sin \alpha = |\vec{a}| \sin \beta$   
 $\implies \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$



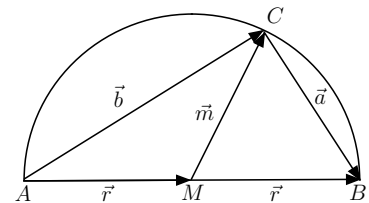
□

## 6 Satz des Thales

Voraussetzung:  $\vec{a} = \vec{r} - \vec{m}$   
 $\vec{b} = \vec{r} + \vec{m}, \quad |\vec{r}| = |\vec{m}|$

Behauptung:  $\vec{a} \perp \vec{b}$  oder  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Beweis:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{r} - \vec{m}) \cdot (\vec{r} + \vec{m})$   
 $= r^2 - m^2 = 0 \implies \vec{a} \perp \vec{b}$

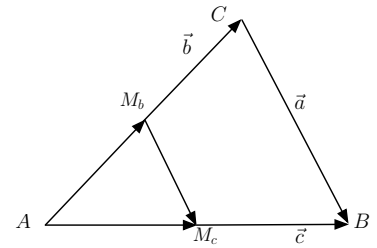


□

## 7 Satz von den Mittelparallelen

Voraussetzung: Dreieck ABC mit  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

Behauptung: Die Verbindung der Seitenmitten zweier Seiten ist halb so lang und parallel der dritten Seite.



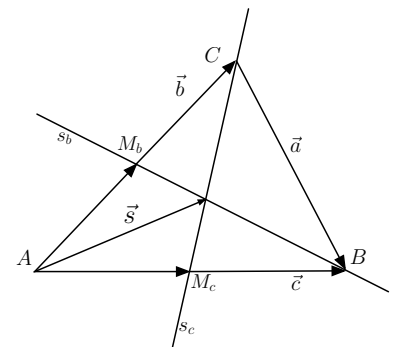
$$\begin{aligned} \text{Beweis: } \overrightarrow{M_b M_c} &= \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} \end{aligned}$$

□

## 8 Satz der Seitenhalbierenden

Voraussetzung: Dreieck ABC mit  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ,  
Teiler  $r, t \in \mathbb{R}$

Behauptung: Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Verhältnis 2:1 im Schwerpunkt.



$$\begin{aligned} \text{Beweis: } \vec{s} &= \vec{b} + t \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{c}\right) - (\vec{b}) && = \vec{c} + r \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b}\right) - (\vec{c}) \\ &= (1-t) \cdot \vec{b} + \frac{1}{2}t \cdot \vec{c} && = \frac{1}{2}r \cdot \vec{b} + (1-r) \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich  
bezüglich  $\vec{b}, \vec{c}$

$$\begin{array}{lcl} \vec{b}: & = 1 - t & = \frac{1}{2}r \\ \vec{c}: & = \frac{1}{2}t & = 1 - r \\ & 1 & = 2 - \frac{3}{2}r \\ & r & = \frac{2}{3} \\ & t & = \frac{2}{3} \end{array} \quad \uparrow \cdot 2$$

Also wird  $\overrightarrow{BM_b}$  aufgeteilt in  $\frac{2}{3}r$  und  $\frac{1}{3}r$ , was dem Verhältnis 2:1 entspricht.

□