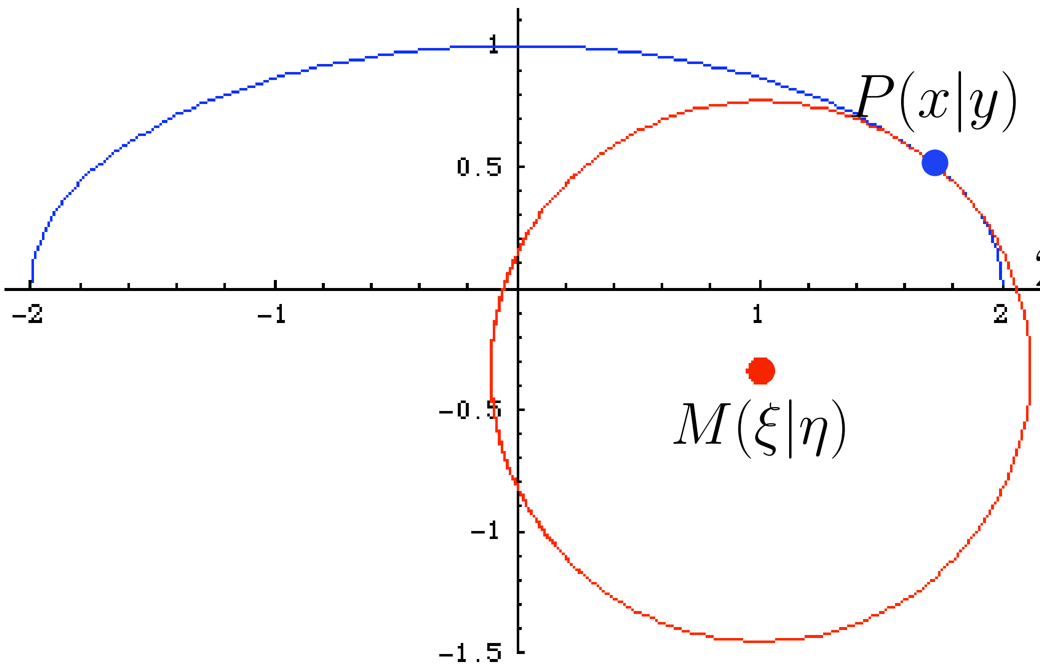
Die Astroide als Evolute der Ellipse

Durch jeden Punkt der Ellipse geht ein Kreis,
dessen Krümmung gleich der Ellipsenkrümmung ist.



Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$x = a \cdot \cos t$$
$$y = b \cdot \sin t$$

$$\dot{x} = -a \sin t$$
$$\dot{y} = +b \cos t$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{+b \cos t}{-a \sin t}$$

Krümmungskreis

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = r^2$$

$$2(x-\xi) + 2(y-\eta)y' = 0$$
$$(x-\xi) + (y-\eta)y' = 0$$

$$1 + y'^2 + yy'' - \eta y'' = 0$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$
$$\xi = x - \frac{1+y'^2}{y''} \cdot y'$$

Die Astroide als Evolute der Ellipse

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{+b\cos t}{-a\sin t}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{-b}{a} \cdot \frac{-\sin^2 t - \cos^2 t}{\sin^2 t} \cdot \frac{-1}{a\sin t} = \frac{-b}{a^2 \sin^3 t}$$

$$\frac{1+y'^2}{y''} = \frac{1 + \frac{b^2\cos^2 t}{a^2 \sin^2 t}}{\frac{-b}{a^2\sin^3 t}} = \frac{a^2\sin^2 t + b^2 \sin t - b^2 \sin^3 t}{-b}$$

$$\xi = x - \frac{1+y'^2}{y''} \cdot y' = a\cos t + \frac{a^2\sin^3 t + b^2\sin t - b^2\sin^3 t}{b} \cdot \frac{-b\cos t}{a\sin t} = \frac{a^2-b^2}{a} \cdot \cos^3 t$$

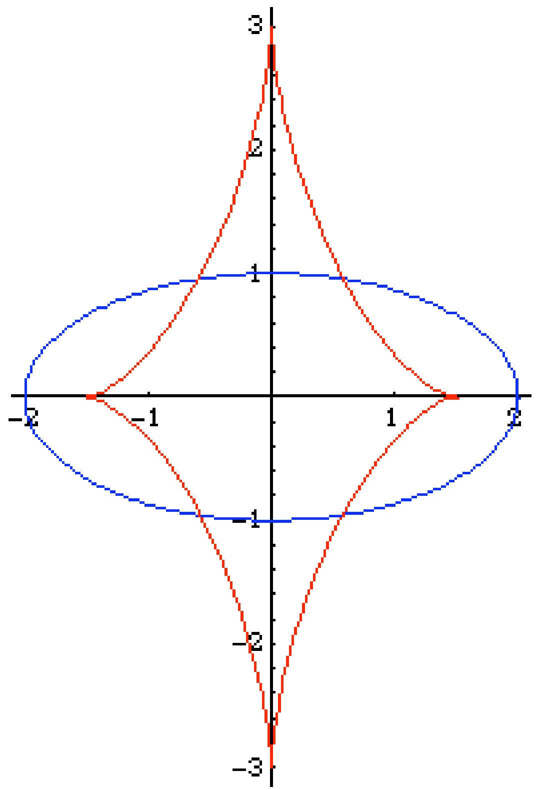
$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = b\sin t - \frac{a^2\sin^3 t + b^2\sin t - b^2\sin^3 t}{b} = \frac{b^2-a^2}{b} \cdot \sin^3 t$$

Die Astroide als Evolute der Ellipse

Die Mittelpunkte aller Krümmungskreise einer Kurve liegen auf einer Kurve, die Evolute genannt wird.

Ellipse in Parameterdarstellung

$$x = 2 \cdot \cos t$$
$$y = \sin t$$



Astroide in Parameterdarstellung

$$x = \xi = \frac{3}{2} \cos^3 t$$
$$y = \eta = -3 \sin^3 t$$

Die Evolute einer Ellipse heißt Astroide.
Umgekehrt ist die Ellipse die Evolvente der Astroiden.