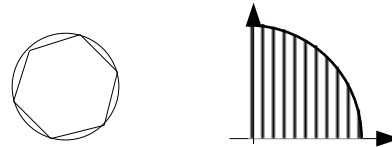


Kurzeinführung in die Integralrechnung

1. Wiederholung der Bestimmung der Kreisfläche

1.1 Einschachtelung durch Vielecke

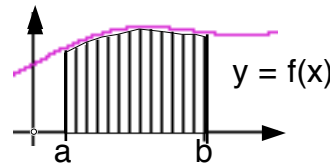
1.2 Zerlegung in Streifen



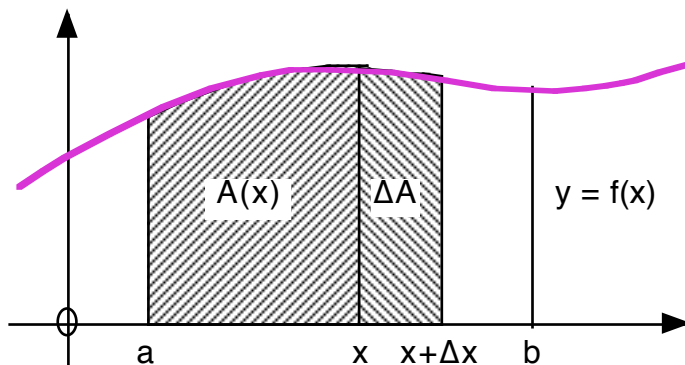
2. Verallgemeinerung der Streifenmethode

2.1 Obersumme

2.2 Untersumme



3. Die Flächeninhaltsfunktion A(x)



$A(x)$ ist die Fläche von a bis x .

ΔA ist der Flächenzuwachs im Streifen der Breite Δx

A_{ab} ist die Fläche von a bis b

$A(x)$ ist ein Maß für die Fläche zwischen Kurve und x -Achse im Intervall $[a, b]$.

Insbesondere gilt:

$$A(a) = 0$$

$A(b) = A_{ab}$, dies ist die Bezeichnung für die gesuchte Fläche

$$\Delta A = A(x + \Delta x) - A(x)$$

Bezeichnet man

den kleinsten Funktionswert im Intervall $[x, x + \Delta x]$ mit m und den größten Funktionswert im Intervall $[x, x + \Delta x]$ mit M so ergibt sich folgende Abschätzung:

$$m = \min f(x), \\ M = \max f(x),$$

$$m \cdot \Delta x \leq \Delta A \leq M \cdot \Delta x \quad | : \Delta x$$

$$m \leq \frac{\Delta A}{\Delta x} \leq M \quad \text{für sehr kleine } \Delta x \approx 0$$

$$f(x) \approx \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} \approx f(x) \quad A'(x) = f(x)$$

Die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion ist also gleich der Ausgangsfunktion.
Problem: Wie kann aus $f(x)$ die Funktion $A(x)$ bestimmt werden?

4. Die Stammfunktion von $f(x)$

Beispiel: $f(x) = x^2$
 $A'(x) = x^2$
 $A(x) = ?$; sicherlich ist $A(x)$ von 3. Grad mit $A'(x)=x^2$, etwa
 $A(x) = \frac{1}{3}x^3$ mit $A'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 = x^2$
 $A(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ ist ebenfalls eine Lösung,
also ist $A(x)$ nicht eindeutig bestimmbar.

Bezeichnung: $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ heißt Stammfunktion von $f(x)$; die Menge aller $F(x)+C$
 $A(x) = F(x) + C = \int f(x) \cdot dx$ heißt das unbestimmte Integral von $f(x)$.

{ Nach Leibnitz (1646-1716) erinnert das Zeichen $\int f(x)dx$ an $\lim \sum f(x)\Delta x$; summe }

5. Flächenmessungen

$$\begin{array}{l} A(x) = F(x) + C \\ A(a) = F(a) + C = 0 \\ A(b) = F(b) + C \end{array} \quad \begin{array}{l} || C = -F(a) \\ || A_{ab} = F(b) - F(a) \end{array}$$

Also ist die gesuchte Fläche zwischen Kurve und x-Achse im Intervall $[a,b]$ die Differenz der Stammfunktionswerte an den Stellen b und a .
Im obigen Beispiel schreibt man wiederum in Anlehnung an Leibnitz:

$$A_{ab} = \int_a^b f(x) \cdot dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

wobei $\int_a^b f(x) \cdot dx$ bestimmtes Integral von $f(x)$ genannt wird.

6. Flächenberechnungen

$$A = \int_2^5 x^2 \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{117}{3}$$

$$A = \int_0^{\pi} \sin(x) \cdot dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = [-(-1)] - [-1] = 2$$

7. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Aus der Integralfunktion $A(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ folgt durch Differentiation

$$A'(x) = \int_a^x f(t)dt = F'(x) - 0 = f(x).$$

Also ist die Differentiation die Umkehrung der Integration.

8. Integrationsregeln, spezielle Stammfunktionen

.....