Einführung in die Komplexen Zahlen 16.02.2007

1. <u>Lösbarkeit von Gleichungen</u>

$5 + x = 7$	I -5	$x = 2$	$\in \mathbb{N}$
$8 + x = 5$	I -8	$x = -3$	$\in \mathbb{Z}$
$x^2 + 2x - 8 = 0$		$x_1 = -4$	$\in \mathbb{Z}$
$(x-2)\cdot(x+4) = 0$		$x_2 = 2$	$\in \mathbb{Z}$
$4\cdot x = 3$	I : 4	$x = 0{,}75$	$\in \mathbb{Q}$
$x^5 = 50$	I 5-te √	$x \approx 2{,}18$	$\in \mathbb{R}$ Darstellung am Zahlenstrahl

2. <u>Die imaginäre Einheit i mit der Eigenschaft</u> $i^2 = -1$

$X^2 = -9$	unlösbar in $\mathbb{R}$	
$X^2 = -9 = 9i^2$	$x_1 = +3i \in \mathbb{C}$	
	$x_2 = -3i \in \mathbb{C}$,	Körper der Komplexen Zahlen,
$x^2 - 4x + 13 = 0$		Darstellung in der Zahlenebene.
$(x-2)^2 + 9 = 0$	unlösbar in $\mathbb{R}$	
$(x-2)^2 - 9i^2 = 0$	$x_1 = 2+3i \in \mathbb{C}$	
	$x_2 = 2-3i \in \mathbb{C}$	

Hausaufgaben:

$x^2 + 25 = 0$
$x^2 - 25 = 0$
$x^2 - 625 = 0$
$x^2 - 6x + 25 = 0$
$x^2 - 6x + 8 = 0$
$5x^2 - 8x + 5 = 0$
$6x^2 - x - 1 = 0$

3. <u>Definition und Eigenschaften der komplexen Zahlen</u>

$z = a + ib$ heißt komplexe Zahl.
a wird Realteil, b Imaginärteil genannt. Es gilt:
Die Darstellung erfolgt in Kartesischen Koordinaten oder in
$z = r\cdot\cos\varphi + i\cdot r\cdot\sin\varphi$ Polarkoordinaten mit einer weiteren Darstellung
$z = r\cdot e^{i\varphi}$ mit $r^2 = a^2 + b^2$ und $\tan\varphi = \frac{b}{a}$. $\varphi = \arctan\frac{b}{a}$ im Bogenmaß.

<u>Anmerkung</u>: Potenzfunktionen und ihre Eigenschaften sind bekannt;
die Basis e wird motiviert als wichtige Zahl bei Wachstumsprozessen oder wird in einer zusätzlichen Stunde über die stetige Verzinsung eingeführt.
Vorschau auf das Thema Grenzwerte: $n \to \infty$
$f(\varphi) = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\cdot\sin\varphi$ über TaylorReihen später im LKi

$\bar{z} = a - ib$ heißt konjugiert komplex mit der Eigenschaft,
dass $z\cdot\bar{z} = (a+ib)\cdot(a-ib) = a^2 + b^2 = r^2$ ist.

$|z| = r = \sqrt{z\cdot\bar{z}}$ Betrag einer komplexen zahl

Hausaufgaben: Gib die Lösungen der alten Hausaufgaben in der Form
$z = r\cdot\cos\varphi + i\cdot r\cdot\sin\varphi = r\cdot e^{i\varphi}$ an. Gib umgekehrt
$z1 = r\cdot e^{i\pi}$, $z2 = r\cdot e^{i\pi/2}$, $z3 = r\cdot e^{i\pi/3}$, $z4 = r\cdot e^{i\pi/4}$
in der anderen Form a + ib an.

4. Übungsstunde 1) Schreibweisen
2) der vier Grundrechenarten,
3) insbesondere bei der Division das Rationalmachen des Nenners :-)

5. Additionstheoreme $r = 1;\ \varphi = \alpha + \beta$.

$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\cdot\sin(\alpha+\beta)$, oder nach Anwendung der Potenzgesetze

$e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)\cdot(\cos\beta + i\cdot\sin\beta)$

$= \cos\alpha\cdot\cos\beta + i\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta + i\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

Durch Vergleich der Real- und Imaginärteile der beiden Zeilen erhält man die ersten beiden Additionstheoreme in der Standardnotation:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

Hausaufgaben: Leite her :

$\sin(\alpha-\beta) =$

$\cos(\alpha-\beta) =$

$\tan(\alpha+\beta) =$

$\tan(\alpha-\beta) =$

$\sin(2\alpha) =$

$\sin(3\alpha) =$

$\cos(2\alpha) =$

$\cos(3\alpha) =$

$\sin x \pm \sin y =$

$\cos x \pm \cos y =$

6. Hauptsatz der Algebra:

Ein Gleichung n-ten Grades hat in $\mathbb{R}$ höchstens n Lösungen,
eine Gleichung n-ten Grades hat in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen.

Beispiel: $x^3 = 125$

	z^3	=	$r^3\cdot e^{i3\varphi}$	
	125	=	$5^3\cdot e^{i3\varphi} = 5^3\cdot e^{0}$	
	r	=	$5,$	
	3φ	=	$2\cdot\pi\cdot n$ mit $n = 0, 1, 2$	$(n-1)$
				$\Rightarrow z = r\cdot\cos\varphi + i\cdot r\cdot\sin\varphi$
$n = 0$	φ	=	0	$\Rightarrow z_1 = 5$
$n = 1$	φ	=	$2\cdot\pi / 3$	$\Rightarrow z_2 = 5\cdot(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3})$
$n = 2$	φ	=	$4\cdot\pi / 3$	$\Rightarrow z_3 = 5\cdot(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3})$

Hausaufgabe: Probe: $(z_2)^3 = 125$?

$x^4 = 625$ vier Lösungen und Probe

7. Lösen von Potenzgleichungen in $\mathbb{C}$

allgemein:

$$z^k = a + i \cdot b = R \cdot e^{i\Phi} \quad mit \quad R^2 = a^2 + b^2 \quad und \quad \tan\Phi = \frac{b}{a}$$

$$z^k = \left(r \cdot e^{i\varphi}\right)^k = r^k \cdot e^{ik\varphi}$$

Ein Vergleich der Koeffizienten und der Exponenten liefert für n = 0, 1, 2, ..., k-1

$$r^k = R \qquad \Rightarrow \quad r = \sqrt[k]{R}$$

$$k\varphi = \Phi + n \cdot 360° = \Phi + 2 \cdot \pi \cdot n \qquad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\Phi}{k} + \frac{n \cdot 360°}{k} = \frac{\Phi + 2 \cdot \pi \cdot n}{k}$$

Beispiel: $z^3 = \sqrt{32} + i \cdot \sqrt{32} \quad mit \quad R^2 = 32 + 32 \quad und \quad \tan\Phi = 1$

$$\Rightarrow \qquad R = 8 \quad und \quad \varphi = 45° = \frac{\pi}{4} \ (Bogenmaß)$$

also: $z^3 = 8 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ in der Exponentialschreibweise

es gilt: $z^3 = \left(r \cdot e^{i\varphi}\right)^3 = r^3 \cdot e^{3i\varphi}$

$$
\begin{array}{lccll}
r^3 & = & 8 & \Rightarrow & r = 2 \\
3\varphi & = & 45° + n \cdot 360° & \Rightarrow & \varphi = \frac{45°}{3} + n \cdot \frac{360°}{3} \\
 & & & \Rightarrow & z = r \cdot \cos\varphi + i \cdot r \cdot \sin\varphi \\
n = 0 \quad \varphi & = & 15° & \Rightarrow & z_0 = 2 \cdot \cos 15 + i \cdot 2 \cdot \sin 15 \\
n = 1 \quad \varphi & = & 15° + 120° & \Rightarrow & z_1 = 2 \cdot \cos 135 + i \cdot 2 \cdot \sin 135 \\
 & & & & z_1 = -\sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2} \\
n = 2 \quad \varphi & = & 15° + 240° & \Rightarrow & z_2 = 2 \cdot \cos 255 + i \cdot 2 \cdot \sin 255
\end{array}
$$

Hausaufgabe: 1) Probe $(z_1)^3 = \sqrt{32} + i \cdot \sqrt{32}$?

2) $z^3 = 1000 \cdot i$ (drei Lösungen mit Probe)

3) $z^6 = 64$ (sechs Lösungen mit Probe)