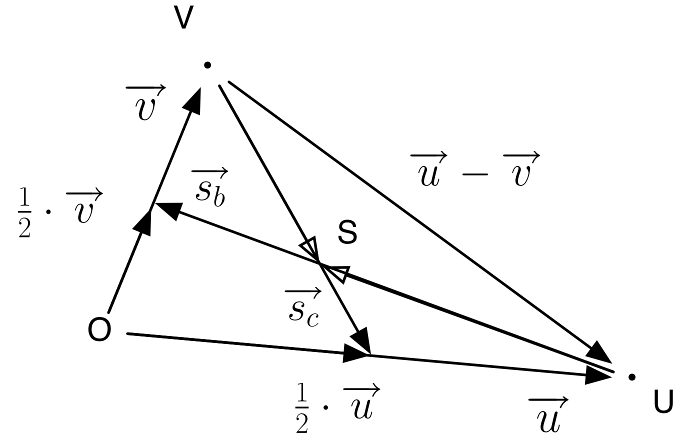
Der 2-Wege-Ansatz in der Analytischen Geometrie

Mario Spengler

April 2007

1 Verhältnis der Seitenhalbierenden in einem Dreieck



$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ seien linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^n$.
Dann führen zwei Wege zum Schnittpunkt S der beiden Seitenhalbierenden

$$\begin{aligned} \overrightarrow{s_b} &= \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{s_c} &= \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \end{aligned}$$

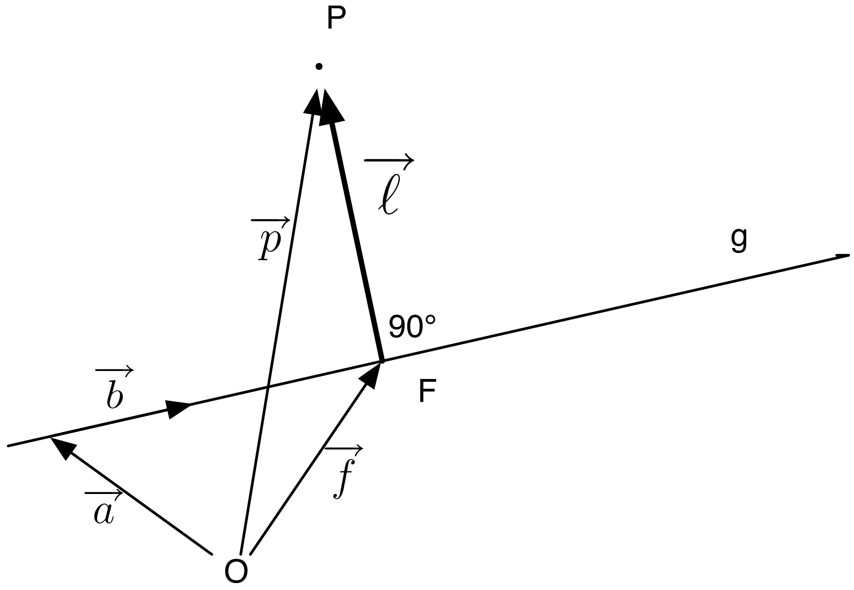
Durch Gleichsetzen erhält man folgende Vektorgleichung, welche durch Koeffizientenvergleich gelöst wird:

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{u} + a \cdot (\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} + b \cdot (\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \quad mit \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}: \quad 1 - a &= \frac{1}{2} \cdot b \quad | \cdot 2 \\ \overrightarrow{v}: \quad \tfrac{1}{2} \cdot a &= 1 - b \quad \hookleftarrow \end{aligned}$$

mit den beiden Lösungen $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{2}{3}$, womit das Teilverhältnis 1 : 2 bewiesen ist.

$\boxed{2}$ **Abstand Punkt - Gerade im** $\mathbb{R}^n$



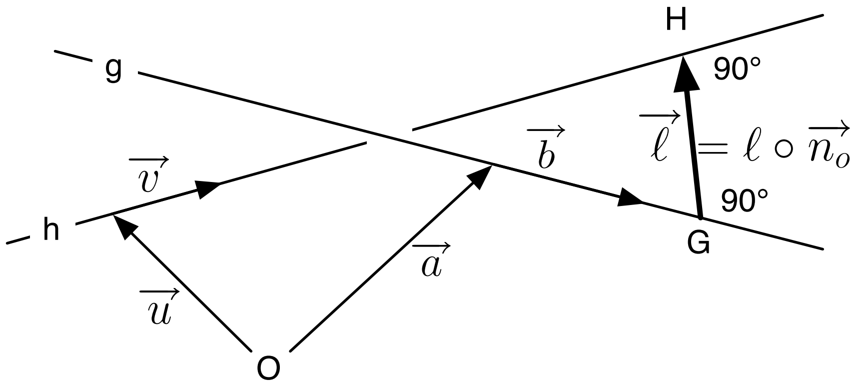
Zum Punkt P führen 2 Wege: Einer direkt, der andere über Fußpunkt F und Lotvektor $\overrightarrow{\ell}$.

$$\overrightarrow{p} = \underbrace{\overrightarrow{a} + r \cdot \overrightarrow{b}}_{\overrightarrow{f}} + \overrightarrow{\ell} \quad | \circ \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{\ell}$$

Durch skalare Multiplikation mit $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{\ell}$ erhält man eine lineare Gleichung in r

$$\Rightarrow r = \frac{(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b}}{(\overrightarrow{b})^2} \quad \Rightarrow \overrightarrow{f} \quad \Rightarrow \overrightarrow{\ell} \quad \Rightarrow |\overrightarrow{\ell}|$$

3.1 Abstand windschiefer Geraden im $\mathbb{R}^n$



Zum Punkt H führen 2 Wege: Einer direkt, der andere über Fußpunkt G und Lotvektor $\overrightarrow{\ell}$.

$$\underbrace{\overrightarrow{u} + r \cdot \overrightarrow{v}}_{\overrightarrow{h}} = \underbrace{\overrightarrow{a} + s \cdot \overrightarrow{b}}_{\overrightarrow{g}} + \overrightarrow{\ell} \quad | \circ \overrightarrow{b}, \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{\ell}$$

Zuerst wird skalar mit $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{\ell}$, dann mit $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{\ell}$ skalar multipliziert; somit wird ein LGS in r, s erzeugt, welches leicht gelöst werden kann.

$$\Rightarrow r, s \quad \Rightarrow \overrightarrow{g}, \overrightarrow{h} \quad \Rightarrow \overrightarrow{\ell} = \overrightarrow{h} - \overrightarrow{g} \quad \Rightarrow |\overrightarrow{\ell}|$$

3.2 Abstand windschiefer Geraden im $\mathbb{R}^3$

Hier existiert eindeutig ein Normalenvektor $\overrightarrow{n_0} \perp \overrightarrow{\ell} = \ell \circ \overrightarrow{n_0}$, mit welchem obige Vektorgleichung nach $\overrightarrow{\ell}$ aufgelöst und skalar mit $\overrightarrow{n_0}$ multipliziert werden kann ($|\overrightarrow{n_0}| = 1$)

$$\begin{aligned} \underbrace{\overrightarrow{u} + r \cdot \overrightarrow{v}}_{\overrightarrow{h}} - \underbrace{\overrightarrow{a} - s \cdot \overrightarrow{b}}_{\overrightarrow{g}} &= \quad \ell \circ \overrightarrow{n_0} \quad | \circ \overrightarrow{n_0} \perp \overrightarrow{b}, \overrightarrow{v} \\ (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{a}) \circ \overrightarrow{n_0} &= \quad \ell \end{aligned}$$

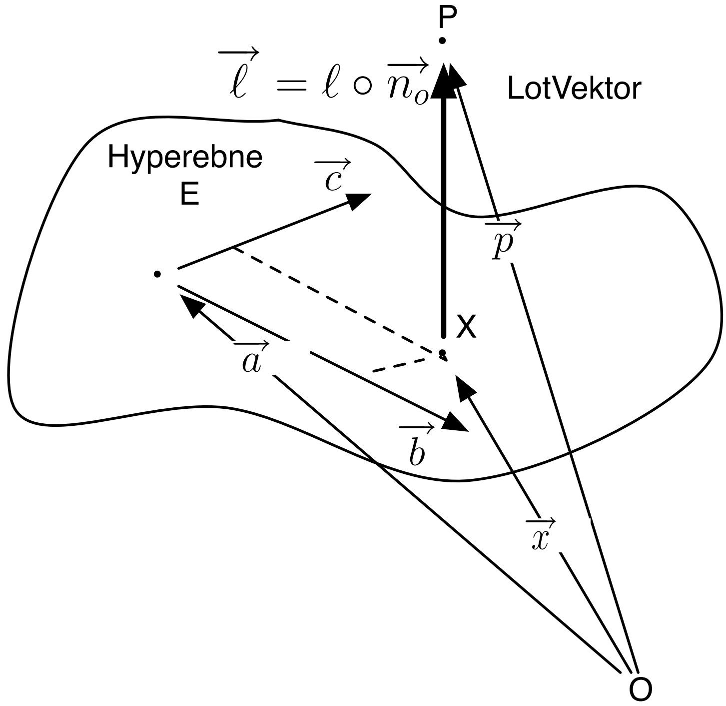
Man erhält direkt den Abstand ℓ, jedoch ohne die Fußpunkte G und H.

4.1 Hesseform für Hyperebenen im $\mathbb{R}^n$

Die *Parameterform* einer Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ besitzt einen Stützvektor $\overrightarrow{a_0}$ und $n-1$ Richtungsvektoren $\overrightarrow{a_1} \dots \overrightarrow{a_{n-1}}$, zu denen eindeutig über ein LGS ein Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ bestimmt werden kann.

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a_0} + r_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + r_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + r_{n-1} \cdot \overrightarrow{a_{n-1}}$$

Die folgende Skizze und die weiteren Gleichungen sind der Einfachheit halber nur für den $\mathbb{R}^3$ formuliert, die Vektoren sind nicht indiziert.



Es gibt zwei Wege zu einem beliebigen Punkt X der Ebene E

$$PF(E): \quad \overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + r \cdot \overrightarrow{b} + s \cdot \overrightarrow{c} \quad | \circ \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$$

Im $\mathbb{R}^2$ ist die Bestimmung des Normalenvektor ganz einfach,
im $\mathbb{R}^3$ hat man die Wahl zwischen dem Vektorprodukt oder einem LGS,
im $\mathbb{R}^n, n > 3$ muss ein $(n-1)$-zeiliges LGS in n Variablen gelöst werden.
Dann ergibt sich direkt die *Normalenform* einer Ebenengleichung

$$NF(E): \overrightarrow{x} \circ \overrightarrow{n} = \overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{n}$$

Löst man die $PF(E)$ nach $\overrightarrow{0}$ auf und multipliziert mit dem normierten Normalenvektor $|\overrightarrow{n_0}| = 1$, so ergibt sich die *Hessesche Normalenform* einer Ebene zu

$$HNF(E): \overrightarrow{x} \circ \overrightarrow{n_0} - \overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{n_0} = 0$$

4.2 Abstand Punkt - Hyperebene

Es gibt wiederum zwei Wege zu einem beliebigen Punkt P außerhalb der Ebene E

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + r \cdot \overrightarrow{b} + s \cdot \overrightarrow{c} + \ell \cdot \overrightarrow{n_0} \quad | \circ \overrightarrow{n_0} \perp \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{p} \circ \overrightarrow{n_0} - \overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{n_0} = \ell$$

Subtraktion von $\overrightarrow{a}$ und skalare Multiplikation mit $\overrightarrow{n_0}$ liefert bis auf das Vorzeichen den Abstand ℓ des Punktes P von der Ebene E. Die Vorzeichenregel erkennt man leicht an dem Sonderfall, dass für P der Ursprung O gewählt wird.